

3-RRR 平面并联机器人的反运动学及传递性能研究

李新宇, 尤晶晶*, 王澍声, 黄宁宁

(南京林业大学 机械电子工程学院, 南京, 210037)

摘要: 3-RRR 平面并联机器人在产品分拣等领域应用前景广阔, 但其反运动学个数问题和运动/力传递性能问题一直没有得到很好的解决。鉴于此, 首先, 提出反运动学方程判别式的概念, 并推导出判别式为 0 时的机构学条件。其次, 剖析不同反运动学个数下机器人构型的特点。然后, 基于螺旋理论, 求解机器人的局部传递指标。在计算每一条支链的输出传递指标时, 根据其余支链的从动杆是否平行, 分两种情况开展讨论, 并对计算模型进行详细的推导与解释。最后, 基于反运动学个数与局部传递指标, 分析了机器人的两类奇异位形。

关键词: 并联机器人; 反运动学; 判别式; 局部传递指标; 奇异位形

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A

Research on Inverse Kinematics and Transmission Performance of 3-RRR Planar Parallel Robots

LI Xin-yu, YOU Jing-jing*, WANG Shu-sheng, HUANG Ning-ning

(College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Jiangsu Nanjing 210037, China)

Abstract: The 3-RRR planar parallel robot has broad application prospects in product sorting and other fields, but the problems of its inverse kinematics number and motion/force transmission performance have not been well solved. In view of this, firstly, the concept of inverse kinematic equation discriminant is proposed, and the mechanical conditions when the discriminant is 0 are derived. Secondly, the characteristics of robot configurations under different inverse kinematics numbers are analyzed. Then, based on the spiral theory, the Local Transmission Index of the robot is solved. When calculating the Output Transmission Index of each limb, the discussion is divided into two situations based on whether the driven links of other limbs are parallel, and a detailed derivation and explanation of the calculation model is provided. Finally, based on the number of inverse kinematics and LTI, two types of singular configurations of the robot are analyzed.

Key words: Parallel robot; Inverse kinematics; Discriminant; Local Transmission Index; Singular configuration

1 引言

并联机构分为六自由度机构和少自由度机构两大类, 其中, 三自由度并联机构是少自由度机构中非常重要的一类^[1]。目前, 国内外学者研究的三自由度并联机构主要是“两转一移”型, 而对“两移一转”型的研究较少。后者在货物搬运、产品分拣、3D 打印等领域应用前景广阔。鉴于此, 本文仅研究具有“两移一转”自由度类型的 3-RRR 平面并联机器人。

3-RRR 平面并联机器人的反运动学对于后续的运动控制、性能分析等工作具有重要意义^[2]。Chen 等^[3]通过求解 3-RRR 平面并联机器人的反运动学, 得到该机器人理论上最多可能存在 8 种构型, 但对于实际的构型数目并未研究。Gosselin 和 Angeles^[4]基于闭环运动链中雅可比矩阵的性质, 分析了并联机构的奇异位形, 并将其分为三类(输入奇异、输出奇异和综合奇异)。其中, 输入奇异、输出奇异分别出现在机器人反运动学分支重叠和正运动学分支重叠的情况。

并联机构的本质功能是输出运动或抵抗外载荷, 运动/力传递性能是并联机构的本质特性之一。使用雅可比矩阵条件数的倒数评价并联机构的运动性能时^[5-6], 由于雅可比矩阵元素量纲不统一, 会导致局部条件数指标无物理意义^[7]。Wang 等^{[8-}

^{9]}系统地分析了并联机构的运动/力传递特性, 定义了输入传递指标(ITI)、输出传递指标(OTI)和局部传递指标(LTI)。文献^[10]对并联机构运动/力传递功率最大值问题展开研究, 论证了并联机构在任意位姿下, 传递功率最大值均存在, 并提出了改进后的特征点法。

本文对 3-RRR 平面并联机器人的反运动学个数和运动/力传递性能进行研究。首先, 通过闭环矢量法求解机器人的反运动学。在此基础上, 提出反运动学方程判别式的概念, 并计算判别式为 0 时的机构学条件。当机器人反运动学个数为 1、2、4、8 时, 分析其构型的特点。接着, 基于螺旋理论, 计算了机器人的局部传递指标值。然后, 结合判别式与局部传递指标, 计算机器人在不同反运动学个数下的局部传递指标值, 据此分析出机器人的两类奇异位形。最后, 通过实验, 验证了理论结果的正确性。

2 反运动学模型

2.1 反运动学求解

3-RRR 平面并联机器人(见图 1)包括静平台、动平台以及三条运动支链。如图 1 所示, 将静平台上三个转动副分别记作 A_1 、 A_2 、 A_3 , 动平台上三个转动副分别记作 C_1 、 C_2 、 C_3 ,

来稿日期:

基金项目: 国家自然科学基金项目(51405237); 江苏省大学生创新创业项目(202310298017Z)

作者简介: 尤晶晶(1985—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 硕士生导师, 加拿大 Toronto Metropolitan University 访问学者, 研究方向: 并联机器人机构学。E-mail: youjingjing251010@njfu.edu.cn

驱动杆与从动杆连接的三个转动副分别记作 B_1 、 B_2 、 B_3 。O 为静平台外接圆圆心，其半径为 b ；P 为动平台外接圆圆心，其半径为 a ；O-xy 为全局坐标系，其 x 轴平行于 A_1A_2 ，y 轴垂直于 A_1A_2 ；动平台的姿态角 γ 为 C_1C_2 相对于 x 轴正向的夹角；主动、从动杆长分别为 l_1 、 l_2 ； θ_i 、 β_i 分别为机器人的驱动角和从动角 ($i=1,2,3$)。

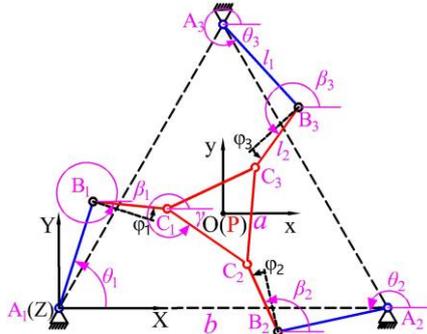


图1 3-RRR 平面并联机器人结构简图

Fig.1 Schematic diagram of 3-RRR planar parallel robots

3-RRR 平面并联机器人的反运动学是指已知动平台的位置 (x_p, y_p) 和姿态角 γ ，求解驱动角 θ_i 。根据几何关系求得 A_1 、 A_2 、 A_3 、 C_1 、 C_2 、 C_3 点在全局坐标系中表示为：

$$A_{1-3}^o = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}b/2 & \sqrt{3}b/2 & 0 \\ -b/2 & -b/2 & b \end{pmatrix}$$

$$C_{1-3}^o = \begin{pmatrix} a \cos\left(\frac{\pi}{6} + \gamma\right) + x_p & a \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \gamma\right) + x_p & a \sin \gamma + x_p \\ a \sin\left(\frac{\pi}{6} + \gamma\right) + y_p & a \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \gamma\right) + y_p & -a \cos \gamma + y_p \end{pmatrix}$$

以第 1 条支链为例，存在闭环矢量方程：

$$\mathbf{r}_{OA_i} + \mathbf{r}_{A_iB_i} + \mathbf{r}_{B_iC_i} + \mathbf{r}_{C_iP} + \mathbf{r}_{PO} = \mathbf{0} \quad (1)$$

将式 (1) 分别向 x、y 轴投影可得：

$$\begin{cases} l_1 \cos \theta_i - M_{x_i} = l_2 \cos \beta_i \\ l_1 \sin \theta_i - M_{y_i} = l_2 \sin \beta_i \end{cases} \quad (2)$$

式中， $M_{x_i} = x_p - x_{A_i} - x_{C_i}$ ， $M_{y_i} = y_p - y_{A_i} - y_{C_i}$ 。

将式 (2) 的等号两边平方并相加，可得：

$$U_i \sin \theta_i + V_i \cos \theta_i + W_i = 0 \quad (3)$$

式中， $U_i = 2l_1M_{y_i}$ ， $V_i = 2l_1M_{x_i}$ ， $W_i = M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 + l_1^2 - l_2^2$ 。

令 $\tan(\theta_i/2) = t$ ，则 $\sin \theta_i = 2t/(1+t^2)$ ，

表 1 反运动学个数与对应构型的特点

Tab.1 Number of inverse kinematics and configuration legend

反运动学个数	判别式	构型	反运动学个数	判别式	构型
1 解	$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases}$		2 解	$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases}$	
			4 解	$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases}$	

$\cos \theta_i = (1-t^2)/(1+t^2)$ 。代入式 (3)，可得：

$$F_i t^2 + E_i t + H_i = 0 \quad (4)$$

$$\text{式中， } F_i = \frac{M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1} + M_{x_i}, \quad E_i = -2M_{y_i},$$

$$H_i = \frac{M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1} - M_{x_i}。$$

求解式 (4) 可得：

$$\theta_i = 2 \arctan \left(\frac{-E_i \pm \sqrt{E_i^2 - 4F_i H_i}}{2F_i} \right) \quad (5)$$

由式 (5) 可得，每条支链的输入量有两个解。所以，在一般情况下，3-RRR 平面并联机器人最多存在 8 种可能构型，这与文献[3]的结论完全吻合。

2.2 反运动学方程判别式

方程 (4) 的判别式为 $\Delta_i = E_i^2 - 4F_i H_i$ 。本节通过对判别式的分析，判断 3-RRR 平面并联机器人的反运动学个数。

当 $\Delta_i = 0$ 时：

$$M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 = (l_1 \pm l_2)^2 \quad (6)$$

当 $\Delta_i > 0$ 时： $(l_1 - l_2)^2 < M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 < (l_1 + l_2)^2$ ；

当 $\Delta_i < 0$ 时： $M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 < (l_1 - l_2)^2$ 或 $> (l_1 + l_2)^2$ 。

结合式 (2)、(6) 可得：

$$M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_i - \beta_i) \quad (7)$$

$$\cos(\theta_i - \beta_i) = \pm 1 \quad (8)$$

式 (6) 对应于支链的输入角 θ_i 仅有一解，且由式 (8) 得，该支链的驱动杆与从动杆处于拉直共线状态 (图 3 (a)) 和重叠共线状态 (图 3 (b))。

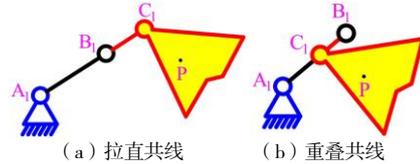


图 2 支链共线

Fig.2 Limb collinearity

(a) extended collinearity; (b) folded collinearity

进一步地，通过判断各支链输入量 θ_i 解的个数，可确定机器人的反运动学个数，具体结果如表 1 所示。

2 解	$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases}$	
	$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases}$			$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases}$	

此外, 当 $\Delta_i < 0$ 时 ($i=1, 2$ 或 3), 机器人的反运动学无解;

当 $\Delta_i > 0$ 时 ($i=1, 2$ 和 3), 机器人的反运动学个数为 8。

3 运动/力传递性能指标

3.1 输入传递指标

在 A_1 点建立辅助坐标系 A_1 -XYZ, 如图 1 所示。同样以第 1 条支链为例, 三个转动副对应三个运动旋量:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{A_1} &= (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_{B_1} &= (0, 0, 1; l_1 \sin \theta_1, -l_1 \cos \theta_1, 0) \\ \mathcal{S}_{C_1} &= (0, 0, 1; \Omega, \bar{U}, 0) \end{aligned} \quad (9)$$

式中, $\Omega = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \beta_1$, $\bar{U} = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \beta_1$ 。

A_1 为驱动副, 故支链的输入运动旋量为:

$$\mathcal{S}_{I_1} = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \quad (10)$$

B_1C_1 为二力杆, 故支链的传递力旋量为:

$$\mathcal{S}_{T_1} = (\mathbf{r}_{B_1C_1}; \mathbf{r}_{B_1} \times \mathbf{r}_{B_1C_1}) = (l_2 \cos \beta_1, l_2 \sin \beta_1, 0; 0, 0, \Phi) \quad (11)$$

式中: $\Phi = l_1 l_2 \sin(\beta_1 - \theta_1)$ 。

对传递力旋量和输入运动旋量进行互易积运算, 得到支链 1 的输入传递指标:

$$\lambda_1 = \frac{|\mathcal{S}_{T_1} \circ \mathcal{S}_{I_1}|}{|\mathcal{S}_{T_1} \circ \mathcal{S}_{I_1}|_{\max}} = \cos \varphi_1 \quad (12)$$

同理, 支链 2、3 的输入传递指标分别为: $\lambda_2 = \cos \varphi_2$ 、 $\lambda_3 = \cos \varphi_3$ 。

因此, 机器人的输入传递指标为:

$$\gamma_1 = \{\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3\}_{\min} \quad (13)$$

3.2 输出传递指标

求解某条支链的输出运动旋量时, 根据其余两条支链上从动杆是否平行, 分为两种情况讨论。以第 1 条支链为例, 假想锁合支链 2、3 中的驱动副。此时, B_2C_2 杆、 B_3C_3 杆分别绕 B_2 、 B_3 转动。如图 3 所示, 当 $B_2C_2 \nparallel B_3C_3$ 时, 机器人动平台的运动可视为绕其速度瞬心 P_1 转动。

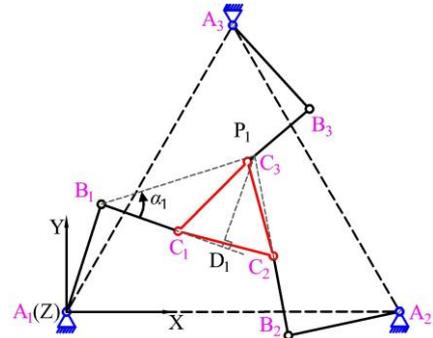


图 3 支链 2、3 从动杆不平行

Fig.3 Driven links of limb 2 and limb 3 are not parallel

支链 1 的输出运动旋量可表示为:

$$\mathcal{S}_{O_1} = (0, 0, 1; \mathbf{r}_{P_1} \times (0, 0, 1)) \quad (14)$$

计算支链 1 输出传递指标:

$$\eta_1 = \frac{|\mathcal{S}_{T_1} \circ \mathcal{S}_{O_1}|}{|\mathcal{S}_{T_1} \circ \mathcal{S}_{O_1}|_{\max}} = \frac{|(h_{T_1} + h_{O_1}) \cos \vartheta - d \sin \vartheta|}{\sqrt{(h_{T_1} + h_{O_1})^2 + d_m^2}} \quad (15)$$

式中, h_{T_1} 、 h_{O_1} 分别为 \mathcal{S}_{T_1} 、 \mathcal{S}_{O_1} 的节距, d 为 \mathcal{S}_{T_1} 与 \mathcal{S}_{O_1} 轴线之间的距离, ϑ 为两旋量轴线之间的夹角。 d_m 表示两旋量轴线距离的最大值。

\mathcal{S}_{T_1} 和 \mathcal{S}_{O_1} 均为线矢量, 故 h_{T_1} 与 h_{O_1} 均为 0。 \mathcal{S}_{T_1} 的轴线方向与单位矢量 $\mathbf{r}_{B_1C_1}$ 的方向一致, \mathcal{S}_{O_1} 的轴线方向垂直于 A_1 -XY 平面, 故 $d = l_{P_1D_1}$, $\vartheta = 90^\circ$ 。 \mathcal{S}_{T_1} 的轴线必经过 B_1 点, \mathcal{S}_{O_1} 的轴线必经过 P_1 点, 故 $d_m = l_{P_1B_1}$ 。 据此, 化简式 (15) 可得:

$$\eta_1 = l_{P_1D_1} / l_{P_1B_1} = \sin \alpha_1 \quad (16)$$

同理, 可得支链 2、3 的输出传递指标分别为: $\eta_2 = \sin \alpha_2$ 、 $\eta_3 = \sin \alpha_3$ 。

因此, 并联机器人的输出传递指标为:

$$\gamma_0 = \{\sin \alpha_1, \sin \alpha_2, \sin \alpha_3\}_{\min} \quad (17)$$

如图 4 所示, 当 $B_2C_2 \parallel B_3C_3$ 时, 动平台的速度瞬心位于无穷远处, 动平台的运动可视为平动。

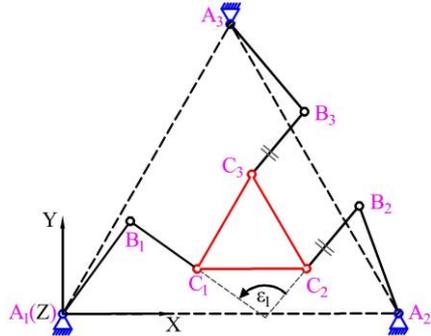


图4 支链2、3从动杆平行

Fig.4 Driven links of limb 2 and limb 3 are parallel

为了与第一种情况进行区分,在表示相关参数的符号右上角加撇。支链1的输出运动旋量可表示为:

$$\mathcal{S}_{O_1}' = (0, 0, 0; r_{B_2C_2} \times (0, 0, 1)) \quad (18)$$

计算支链1的输出传递指标:

$$\eta_1' = |\sin \varepsilon_1| \quad (19)$$

基于式(16)结论,支链2、3的输出传递指标分别为:

$$\eta_2' = \sin \alpha_2', \quad \eta_3' = \sin \alpha_3'$$

机器人的输出传递指标:

$$\gamma_0' = \{|\sin \varepsilon_1|, \sin \alpha_2', \sin \alpha_3'\}_{\min} \quad (20)$$

特别地,当仅有两个从动杆平行时,例如, $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \not\parallel B_3C_3$, 机器人的输出传递指标变成:

$$\gamma_0' = \{|\sin \varepsilon_3|, \sin \alpha_1', \sin \alpha_2'\}_{\min} \quad (21)$$

其它两种情况与此类似,不再重复。

3.3 局部传递指标

局部传递指标值为输入、输出传递指标值中的较小值。当三条支链中任意两条支链的从动杆都不平行时:

$$\gamma = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}_{\min} \quad (22)$$

当三条支链中至少存在两条支链的从动杆相互平行时:

$$\gamma = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1', \eta_2', \eta_3'\}_{\min} \quad (23)$$

3.4 奇异位形

任意一条支链满足判别式为0的条件时,该支链上驱动角与从动角满足式(8)。结合式(11),可得支链的传递力旋量为:

$$\mathcal{S}_T = (l_2 \cos \beta_i, l_2 \sin \beta_i, 0; 0, 0, 0) \quad (24)$$

机器人的输入传递指标为:

$$\gamma_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}_{\min} = 0 \quad (25)$$

此时,3-RRR平面并联机器人反运动学方程失根;至少有一条支链的主动杆与从动杆处于共线状态,机器人处于第一类奇异位形,见表2中(a)图。

当反运动学个数为8时,机器人不会出现第一类奇异。当 $B_2C_2 \not\parallel B_3C_3$ 时,若 $\alpha_1 = 0$,则 B_1C_1 与 P_1 点共线。此时,机器人三个从动杆交于一点,机器人处于第1种输出奇异位形,见表2中(b)图。当 $B_2C_2 \parallel B_3C_3$ 时,若 $\varepsilon_1 = 0$,则 B_1C_1 与 B_2C_2 平行。此时,机器人的三个从动杆相互平行,机器人处于第2种输出奇异位形,见表2中(c)图。

表2 3-RRR平面并联机器人的两类奇异位形

Tab.2 Two types of singular configurations of 3-RRR planar parallel robots

第一类奇异位形	第二类奇异位形	
ITI=0	OTI=0	
(a)	(b)	(c)

4 实验验证

4.1 虚拟实验

设置3-RRR平面并联机器人的静平台、动平台的外接圆半径分别为120mm、60mm;驱动杆、从动杆长度分别为100mm、80mm。

根据上述结构参数建立机器人的虚拟样机,如图5所示。当机器人运动至表2中(a)图所示第一类奇异位形时,其三条支链的主动杆与从动杆均处于共线状态。该位形下,机器人的三条支链判别式理论值均为0,故反运动学个数为1。测量得到其输出参数为: $x_p = 46.3006\text{mm}$ 、 $y_p = 81.5332\text{mm}$ 、 $\gamma = 1.2219\text{rad}$ 。

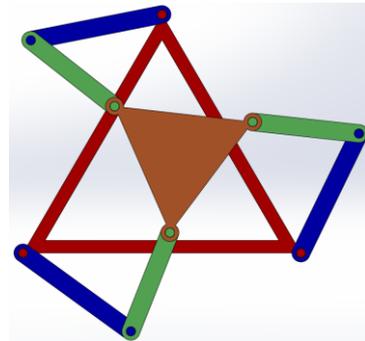


图5 3-RRR平面并联机器人虚拟样机

Fig.5 A 3-RRR planar parallel robot virtual prototype

将上述参数代入 $\Delta_i = E_i^2 - 4F_iH_i$, 计算得到判别式的实际

值如表 3 所示。其中，误差主要来源于模型参数的测量偏差。

表 3 判别式的实际值与理论值对比

Tab.3 Comparison between actual values and theoretical values of discriminants

判别式	实际值/mm ²	理论值/mm ²
Δ_1	3.5124×10^{-5}	0
Δ_2	1.7388×10^{-5}	0
Δ_3	-3.1478×10^{-6}	0

第一类奇异的运动学本质是：当机器人输入速度为 0 时，输入速度可能不为 0。设置驱动杆的角速度为固定值： $6^\circ/s$ ，仿真得到机器人动平台角速度、线速度与驱动杆角速度之间的关系如图 6 所示。当机器人运动至表 2 中 (a) 图所示位形时，动平台的角速度、线速度均为 0，而驱动杆角速度始终为 $6^\circ/s$ 。综上，可验证第 4 节中关于第一类奇异性结论的正确性。

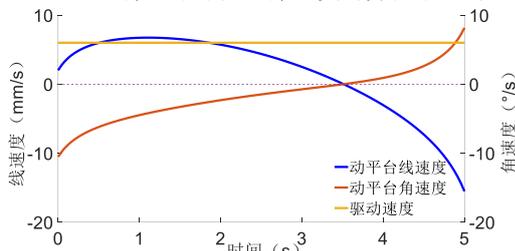


图 6 机器人的输入、输出速度

Fig.6 Input velocities and output velocities of robots

第二类奇异的运动学本质是：当机器人输入速度为 0 时，输出速度可能不为 0。根据初始输入参数与发生第二类奇异的输入参数之间的差值 $\Delta\theta_i$ 设置驱动杆的角位移，例如：支链 1 的驱动杆初始位置与奇异位置的角度差 $\Delta\theta_1$ 为 4.57° ，则设置其角位移为： $4.57 \times \sin(\pi/2 \times \text{Time})$ 。在时间为 1s 时，三个从动杆满足第 4 节分析的位置状态，且三个驱动杆角速度均为 0，动平台速度如图 7、图 8 所示，此时动平台仍具有角速度或线速度。由此，可验证第 4 节中关于第二类奇异性结论的正确性。

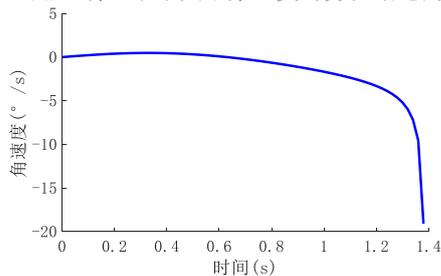


图 7 动平台角速度

Fig.7 Angular velocity of mobile platform

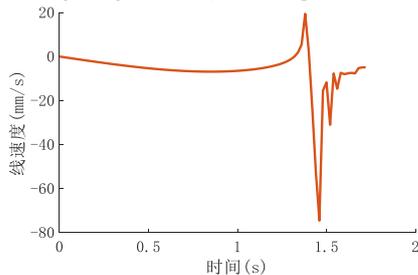


图 8 动平台线速度

Fig.8 Velocity of mobile platform

4.2 实物实验

3D 打印机器人的实物样机，如图 9 所示。将上方支链的主动杆与从动杆拉直，并固定动平台。此时，该支链仍可以发生小幅度抖动（见图 9），即主动杆速度不为 0。这进一步验证了第 4 节中第一类奇异性结论的正确性。



图 9 实物样机实验 1

Fig.9 Physical prototype experiment 1

固定三条支链的主动杆，当三个从动杆交于一点时，动平台仍可以绕交点小幅度转动（见图 10），即动平台具有角速度；当三个从动杆相互平行时，动平台仍可以沿垂直于从动杆方向小幅度抖动（见图 11），即动平台具有线速度。这进一步验证了第 4 节中第二类奇异性结论的正确性。

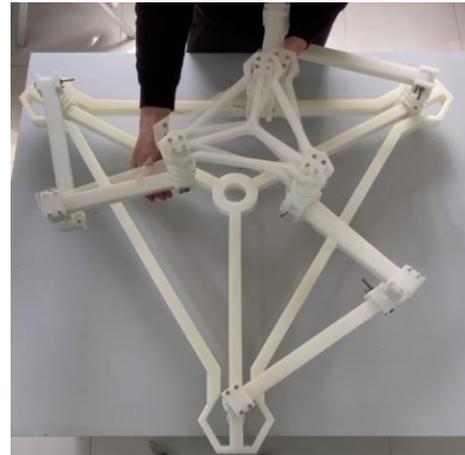


图 10 实物样机实验 2

Fig.10 Physical prototype experiment 2



图 11 实物样机实验 3

Fig.11 Physical prototype experiment 3

在实际应用方面，并联机器人因具有刚度大、结构稳定紧凑、承载能力强、精度高以及动力性能好等优点，在林果采摘、货物搬运、零件装配等领域的应用前景广阔。图 12 为 3-RRR 平面并联机器人模拟苹果采摘的应用场景，在动平台上安装机

械手指，机构整体成为机械手，通过动平台移动至指定位置，配合手指的弯曲即可完成抓取。



图 12 机械手抓取过程示意图

Fig.11 Schematic diagram of the grabbing process of the robotic arm

5 结论

(1) 当 3-RRR 平面并联机器人的支链输入角具有唯一解时，输出参数与结构参数满足关系式 $M_{x_i}^2 + M_{y_i}^2 = (l_1 \pm l_2)^2$ ，对应于主动杆与从动杆拉直共线或重叠共线的情况。

(2) 3-RRR 平面并联机器人的反运动学个数为 1、2、4 时，分别存在 8、12 和 6 种可能的构型。

(3) 当 3-RRR 平面并联机器人的反运动学失根时，输入传递指标值等于 0，对应于第一类奇异；当三个从动杆相互平行或交于一点时，输出传递指标值等于 0，对应于第二类奇异。

参考文献：

- [1] YOU JJ, XIFF, SHEN HP, et al. A novel Stewart-type parallel mechanism with topological reconfiguration : Design , kinematics and stiffness evaluation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 162: 104329.
- [2] 徐帅, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 一种可重构 3-RRR 平面并联机构及其工作空间分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2022, 54 (03): 466-472.
(XU S, YOU JJ, YE P D, et al. A Reconfiguration 3-RRR Planar Parallel Mechanism and Its Workplace Analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54 (03): 466-472.)
- [3] CHEN Y, LIU X J, CHEN X. Dimension optimization of a planar 3-RRR parallel manipulator considering motion and force transmissibility[C]. IEEE International Conference on Mechatronics & Automation. IEEE, 2013, pp. 670-675.
- [4] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6 (3): P. 281-290.
- [5] CHEN X L, SUN X Y. Dexterity analysis of a 4-UPS-RPS parallel mechanism[J]. International Journal of Advance Robotic Systems, 2012, 9 (4): 1-8.
- [6] GOSSELIN C. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1989, 111 (2): 202-207.
- [7] MERLET J. P. Jacobian, Manipulability, Condition number, and Accuracy of Parallel Robots[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128 (1): 199-206.
- [8] WANG J S, WU C, LIU X J. Performance evaluation of parallel manipulators :

Motion/Force transmissibility and its index[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45 (10), 1462-1476.

- [9] WU C, LIU X J, WANG L P, et al. Optimal Design of Spherical 5R Parallel Manipulators Considering the Motion/Force Transmissibility[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132 (3): 031002.

- [10] 陈祥, 谢福贵, 刘辛军. 并联机构中运动/力传递功率最大值的评价[J]. 机械工程学报, 2014, 50 (3): 1-9.

(CHEN X, XIE F G, LIU X J. Evaluation of the Maximum Value of Motion/force Transmission Power in Parallel Manipulators[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50 (3): 1-9.)